Equazioni irrazionali

Sono le equazioni in cui l'incognita compare sotto radice.

Se le equazioni sono del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) ,$$

si eleva alla n per eliminare il radicale : $A(x) = B^n(x)$

Se n è dispari la nuova equazione è certamente equivalente alla prima perché elevare ad un esponente negativo non modifica i segni (per es. se $a^3 = b^3$, anche $a = b$)

mentre se n è pari, elevando alla n si ottiene un'equazione che potrebbe avere più soluzioni dell'equazione originale (per es. se $a^2 = b^2$, potrebbe essere $a = b$ oppure $a = -b$)

Esempi

1)

$$\sqrt{6x+1} = 2x-3, \quad 6x+1 = (2x-3)^2$$

$$6x+1 = 4x^2-12x+9, \quad 4x^2-18x+8=0$$

$$2x^2-9x+4=0, \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \begin{cases} \frac{9+7}{4} = 4 \\ \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione $\frac{1}{2}$ non è soluzione dell'equazione irrazionale e deve essere scartata.

L'unica soluzione è $x=4$.

2)

$$\sqrt[3]{2(2x+1)+1} = \sqrt[3]{7x-8}, \quad 2(2x+1)+1 = 7x-8$$

$$4x+2+1 = 7x-8, \quad 3x = 11, \quad x = \frac{11}{3}$$

3)

$$\frac{1}{\sqrt{13+4x}} = \frac{1}{x+2}, \quad 13+4x = (x+2)^2 \quad \left(\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -\frac{13}{4} \end{array} \right)$$

$$13+\cancel{4x} = x^2+\cancel{4x}+4, \quad x^2=9, \quad x=\pm 3$$

Solo $x=3$ è accettabile.

Se ci sono più radicali contenenti l'incognita si deve elevare a potenza più volte.

Esempi

1)

$$\sqrt{x-3}+2=\sqrt{x+21}$$

$$\cancel{x}-3+4+4\sqrt{x-3}=\cancel{x}+21$$

$$4\sqrt{x-3}=20, \qquad \sqrt{x-3}=5$$

$$x-3=25, \qquad x=28$$ (accettabile)

2)

$$\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x-1}$$

$$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{2}$$

$$\cancel{3}\cancel{-x}+\cancel{x}\cancel{-1}+3\sqrt[3]{(3-x)^2(x-1)}+3\sqrt[3]{(3-x)(x-1)^2}=\cancel{2}^{0}$$

$$(3-x)^2(x-1)=-(3-x)(x-1)^2$$

$$(3-x)(x-1)\cdot(3\cancel{-x}+\cancel{x}-1)=0$$

Le soluzioni sono $x=3$ e $x=1$.